www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES

STRASBOURG

# CONCOURS D'ENTRÉE 1989

## PREMIERE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

## OPTION BIOLOGIE-MATHEMATIQUES

**DUREE: 3 HEURES**

### Problème I

Ce problème étudie une suite d'épreuves indépendantes numérotées par les entiers supérieurs ou égaux à 1, chaque épreuve ayant deux résultats possibles notés P (pile) et F (face). La probabilité d'apparition de P (resp. F) à une épreuve est notée p (resp. q) $(0 < p < 1)$ $(p + q = 1)$.

1. On s'intéresse à la probabilité, notée $f_n$, de l'événement $E_n$ : "la séquence PF (succession d'un résultat pile et d'un résultat face consécutifs et dans cet ordre) apparaît pour la première fois aux épreuves numérotées n-1 et n". On a : $f_0 = f_1 = 0$ ; $f_2 = pq$.

   a. Calculer $f_3$ , $f_4$ , $f_5$.

   b. En décomposant l'événement $E_n$ en événements élémentaires, justifier soigneusement l'égalité :

   $$f_n = \sum_{j=1}^{n-1} p^j q^{n-j}.$$

   c. En déduire l'expression explicite de $f_n$ au moyen de p et q.

   d. On appelle T la variable aléatoire discrète vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$,

   Prob $(T = n) = f_n$ , Prob $(T = +\infty) = \widetilde{f}$.

   T représente le temps d'attente de la première apparition de la séquence PF. Calculer la fonction génératrice de T en précisant son domaine de définition. Que vaut $\widetilde{f}$ ? Calculer l'espérance de T.
   On fera les calculs pour $p \neq q$, puis pour $p = q$.

2. Décomposer en événements élémentaires l'événement : "la première séquence PP apparaît avant la première séquence FP". Calculer la probabilité de cet événement.

3. On cherche à calculer la probabilité x de l'événement : "la première séquence PF apparaît avant la première séquence FP" ; on note $x_n$ la probabilité de l'événement : "la séquence PF apparaît pour la première fois aux épreuves numérotées n-1 et n, et il n'y a pas eu avant de séquence FP".

   a. Quelle est la relation entre x et les nombres $x_n$ ?

   b. Calculer $x_n$ en étudiant les événements élémentaires associés.

T.S.V.P.

page 284 ECOLE NATIONALE des INGENIEURS des TRAVAUX RURAUX
1989 2-1 et des TECHNIQUES SANITAIRES de STRASBOURG
Dot.Phy.Math-Math 2,Dot.Bio.Math.-Math 1

c. En déduire x.

4. En s'inspirant du (3.), calculer la probabilité des événements :

   a. "la première séquence PP apparaît avant la première séquence PF",

   b. "la première séquence PF apparaît avant la première séquence PP",

   c. "la première séquence PF apparaît avant la première séquence FF".

5. On note y la probabilité de l'événement A : "la première séquence PP apparaît avant la première séquence FF" et $y_n$ la probabilité de l'événement $A_n$ : " la séquence PP apparaît pour la première fois aux épreuves numérotées n-1 et n, et il n'y a pas eu avant de séquence FF".

   a. Décomposer $A_n$ en événements élémentaires suivant la parité de n.

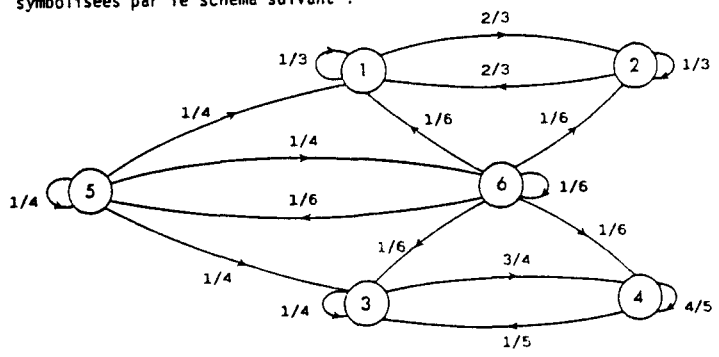
   b. Calculer $y_n$ ; en déduire y.

6. Grâce aux résultats précédents, dresser un tableau à double entrée donnant les probabilités des événements du type "la première séquence $\mathcal{E}_i$ apparaît avant la première séquence $\mathcal{E}_j$", où $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}_j$ appartiennent à l'ensemble {PP, PF, FP, FF}

7. On considère le jeu suivant à deux joueurs $J_1$ et $J_2$ : le joueur $J_1$ choisit une des quatre séquences PP, PF, FP, FF, puis le joueur $J_2$ choisit une des trois séquences restantes. On effectue ensuite des jets répétés d'une pièce de monnaie et le gagnant est celui qui voit sa séquence apparaître la première dans la succession de pile et face obtenue.
   On demande d'indiquer, suivant la séquence choisie par $J_1$, la stratégie optimale de $J_2$, c'est-à-dire la séquence que doit choisir $J_2$ pour maximiser sa probabilité de gagner.

## Problème II

A un instant donné, un système peut se trouver dans un (et un seul) des six états possibles numérotés $E_1$, ..., $E_6$. On observe ce système aux instants 1, 2, ..., n... Le système évolue dans le temps en suivant les règles de passage symbolisées par le schéma suivant :




qui s'interprète ainsi : notons $p_{i,j}$ la probabilité que le système passe à l'état $E_i$ à l'instant n, sachant qu'il était dans l'état $E_j$ à l'instant n-1 (cette probabilité est indépendante de n). Les flèches partant de l'état noté ① s'interprètent par : $p_{1,1} = \frac{1}{3}$, $p_{2,1} = \frac{2}{3}$ ; de même $p_{4,4} = \frac{4}{5}$, $p_{3,4} = \frac{1}{5}$ et de même pour les autres états.

On note $X_n$ le vecteur "état du système à l'instant n", qui est un vecteur colonne à 6 lignes, dont la $i^{ième}$ composante est la probabilité que le système se trouve dans l'état $E_i$ à l'instant n. Le vecteur $X_0$ est un vecteur donné ("état initial"), dont les composantes sont positives ou nulles, et de somme égale à 1.

1. Etablir l'égalité matricielle $X_{n+1} = M.X_n$ où M est une matrice de la forme $M = \begin{bmatrix} A & 0 & U \\ 0 & B & V \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix}$ où A, B, U, V, T désignent des matrices (2x2) à calculer (0 : matrice nulle).

2. Démontrer que la matrice $M^n$ s'écrit $\begin{bmatrix} A^n & 0 & U_n \\ 0 & B^n & V_n \\ 0 & 0 & T^n \end{bmatrix}$ où $A^n$, $B^n$, $T^n$ sont les matrices puissances $n^{ièmes}$ de A, B, T respectivement, et où $U_n$ et $V_n$ sont deux matrices (2x2). En examinant la relation $M^{n+1} = M^n.M$, trouver une relation de récurrence reliant $U_{n+1}$ et $U_n$ (et $V_{n+1}$, $V_n$). En déduire que le calcul de $M^n$ peut se ramener au calcul des puissances de A, B, T.

3. Calculer les puissances des matrices A, B, T.

4. Calculer $\lim_{n \to +\infty} M^n$ (la limite d'une suite de matrices est définie terme à terme). Quel est le vecteur "état limite", $X^* = \lim_{n \to +\infty} X_n$ ?

   Calculer les vecteurs "états limites" dans chacun des 6 cas où l'état initial est un des six états possibles $E_1$, ..., $E_6$.

5. Question indépendante de (2., 3., 4.).
   Montrer que, s'il existe un vecteur "état limite" $X^* = \lim_{n \to +\infty} X_n$,
   alors nécessairement $X^*$ est vecteur propre de la matrice M pour la valeur propre 1. Donner l'expression d'un vecteur état limite $X^*$ (on montrera que cette expression ne dépend que d'un paramètre réel).

---

ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX
et des TECHNICIENS SANITAIRES de STRASBOURG
Opt. bio. Math.-Math 1
page 285
1989 2

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail